Задача 1 - Конфеты

Для решения задачи нужно найти число делителей числа N. Действительно, их число - число способов разделить конфеты поровну между какими-то детьми.

- Решение на 70 баллов:
  Перебрать все числа от 1 до N и посчитать число тех, которые делят N. Сложность решения: O(N)

Задача 1 - Конфеты

- 90 баллов:
  Перебирать делители только до корня из N.
  Действительно, если x является делителем N, то и N/x тоже им является. Отдельно надо разобрать случай, когда N является квадратом некоторого числа x, потому что в этом случае нельзя учитывать x и N/x два раза.
  Сложность решения: O(sqrt(N))

Задача 1 - Конфеты

- 100 баллов:
  Такое же, как на 90 баллов, но для хранения N нужно использовать 64-битный тип данных - long long или Int64.

Задача 2 - Лотерея

- 60 баллов:
  Перебрать все возможные пары чисел A_i, посчитать число тех, которые дают минимальное произведение.
  Сложность решения: $O(N^2)$.

Задача 2 - Лотерея

- 100 баллов:
  Нужно рассмотреть несколько случаев.
  - Имеются числа различных знаков. Тогда минимальным возможным является произведение минимального отрицательного числа и максимального положительного числа. Нужно найти минимальное число в массиве, посчитать количество раз, которое оно встречается. То же самое нужно сделать для максимального. Ответ - произведение этих количеств.

Задача 2 - Лотерея

- 100 баллов:
  - Все числа положительные либо все числа отрицательные. Эти случаи симметричны. В этом случае минимальным является произведение двух минимальных чисел или двух максимальных чисел соответственно.

Задача 2 - Лотерея

- 100 баллов:
  - Все числа являются либо нулем, либо имеют один и тот же знак. Тогда минимальными возможным произведением является ноль. Действительно, произведение любых двух других чисел будет положительным числом.

Задача 2 - Лотерея

Ноль можно получить, только умножив ноль на другое число либо умножив ноль на ноль. Пусть в массиве k нулей.
Тогда ответом будет $k(N - k) + k(k - 1)/2$.

Сложность решения $O(N)$ либо $O(N \log N)$ в зависимости от использования сортировки.

Задача 3 - Башни

Задача является классической задачей о поиске наибольшей возрастающей подпоследовательности - LIS.

- Решение на 40 баллов:
  Переберем все возможные варианты подпоследовательностей. Их число чуть меньше 2^N. Проверим их на то, что они являются возрастающими за $O(N)$. Найдем наибольшую из них. Сложность решения $O(N2^N)$.

Задача 3 - Башни

- 70 баллов:
  Решать задачу будем методом динамического программирования. Пусть F[i] - длина наибольшей возрастающей подпоследовательности, заканчивающейся в элементе A[i]. Логично, что предыдущий элемент этой последовательности является меньше A[i], а также имеет меньший индекс. Тогда $F[i] = \max\{F[j] + 1 \mid j < i, A[j] < A[i]\}$.

Задача 3 - Башни

Ответом является максимальный элемент этого массива. Реализовать вычисление этого массива можно тривиальным образом двумя вложенными циклами. Сложность решения: $O(N^2)$.

Задача 3 - Башни

- 100 баллов:
  Решим с помощью динамического программирования с другой функцией F. Пусть F[i] - это число, на которое заканчивается возрастающая подпоследовательность длины i, а если таких несколько, то меньшее из них.

Задача 3 - Башни

Нетрудно видеть, что F[i - 1] <= F[i] для любых i. Тогда для пересчета значения F для очередного элемента A[i] можно использовать бинарный поиск за O(logN) для поиска подходящего значения F[i].
Сложность решения: O(NlogN)

Задача 4 - Секретные двери

Сформулируем задачу с точки зрения теории графов. Дан взвешенный неориентированный граф с N ребрами и M вершинами. Нужно найти такой путь из вершины 1 в вершину N, что вес максимального ребра минимален.

Задача 4 - Секретные двери

- Решение на 60 баллов:
  В графе всего M ребер. Вес одного из них является ответом на задачу, поскольку в некотором пути именно оно будет являться максимальным. Проверим существование пути с максимальным весом ребра не больше X. Исключим из графа все ребра, которые имеют больший вес. Проверим поиском в ширину или глубину, что существует путь из 1 в N.

Задача 4 - Секретные двери

Если такой путь существует, тогда в графе есть путь из 1 в N с максимальным весом не больше X.

Переберем все M ребер, вес каждого используем в качестве X. Для каждого проверим существование пути.

Среди тех, для которых путь существует, выберем минимальный.

Сложность решения: $O(M * (N + M)) = O(NM)$

Задача 4 - Секретные двери

- Решение на 100 баллов:
  Нетрудно видеть, что если в графе есть путь, максимальный вес ребра в котором не превосходит X, тогда для любого Y>X это утверждение также выполнено. Это верно и в другую сторону: если не существует пути, максимальный вес ребра в котором не превосходит X, то такого пути нет и для любого Y<X.

Задача 4 - Секретные двери

- Решение на 100 баллов:
  Это значит, что ответ на задачу можно перебирать двоичным поиском в отсортированном массиве ребер.
  Всего будет рассмотрено порядка O(logM) ребер.
  Итоговая сложность решения: O((N + M)logM) = O(MlogM)

Задача 4 - Секретные двери

- Другим способом решения является модификация алгоритма Дейкстры.
  Отличие является в том, что при пересчете расстояний на каждой итерации алгоритма использовать нужно минимум, а не сумму весов.
  Решение получает 60 либо 100 баллов в зависимости от использования алгоритма Дейкстры с кучей или без.